

TD Simulation de variables aléatoires

Exercice 1

Soit F_n la fonction de répartition empirique d'une suite de v.a. $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d de fonction de répartition F continue. Soit H_n la fonction de répartition empirique d'une suite de v.a. $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d de loi uniforme sur $]0, 1[$ et de fonction de répartition H . Montrer à l'aide de l'inverse généralisée que $|F_n - F|_\infty = |H_n - H|_\infty$.

Qu'en déduit-on pour le théorème de Glivenko-Cantelli et de Kolmogorov.

Exercice 2

Soit X une v.a. de loi discrète :

$$X = p_0 \delta_{\{x_0\}} + p_1 \delta_{\{x_1\}} + \cdots + p_n \delta_{\{x_n\}},$$

où $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une probabilité sur l'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. On veut simuler X à partir d'une v.a. U de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la v.a.

$$Y = x_0 1_{\{U < p_0\}} + x_1 1_{\{p_0 \leq U < p_0 + p_1\}} + \cdots + x_n 1_{\{p_0 + \cdots + p_{n-1} \leq U \leq 1\}}$$

a même loi que X .

Exercice 3

Soit X une v.a. de loi binomiale de paramètres n et p : $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. On veut simuler la loi de X à partir de n v.a. indépendantes $U_1, \dots, U_n$ de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la v.a. Y égale au nombre de U_i qui sont inférieurs à p suit la même loi que X .

En déduire la simulation des lois géométrique et multinomiale.

Exercice 4

Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, montrer que l'on peut simuler la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ en posant $X = -\log U/\lambda$.

Exercice 5

Soit T une v.a. exponentielle d'espérance 1, et Θ une v.a. uniformément distribuée à valeurs dans $[0, 2\pi[$. On suppose T et Θ indépendantes. On définit :

$$X = \sqrt{2T} \cos(\Theta) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{2T} \sin(\Theta).$$

1. Montrer que X et Y ont même loi et sont indépendantes.
2. Quelle est cette loi commune ? En déduire une méthode de simulation de la loi normale.

3. Soient U_1 et U_2 des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi du couple de v.a.

$$((-2 \log U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2), (-2 \log U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2)) ?$$

En déduire une méthode de simulation de la loi normale.

4. En déduire la simulation des lois de Cauchy, du Khi 2, de student, de Fisher.

Exercice 6

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit la v.a.

$$T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Montrer que T_n suit la loi Gamma, $\Gamma(n, \lambda)$ de paramètres n et λ de fonction de densité :

$$f_Y(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

En déduire une méthode de simulation de la loi Gamma.

2. Montrer que la v.a.

$$Y = \mathbf{1}_{\{X_1 \leq 1 < X_1 + X_2\}} + 2 \times \mathbf{1}_{\{X_1 + X_2 \leq 1 < X_1 + X_2 + X_3\}} + \dots + n \times \mathbf{1}_{\{X_1 + \dots + X_n \leq 1 < X_1 + \dots + X_{n+1}\}} + \dots$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(Y = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n \geq 0.$$

En déduire une méthode de simulation de la loi de Poisson.

Exercice 7 Méthode par conditionnement

Soit X et Y deux variables aléatoires. Montrer que si l'on sait simuler Y et $X|Y$ alors on sait simuler X et (X, Y) .

Exercice 8 Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit $E = \{Y > (1 - X)^2/2\}$. Calculer $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap E)$.
2. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $\{Y > (1 - X^2)/2\}$ admet pour densité :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$$

3. Soit Z une v.a. suivant la loi ci-dessus et S une v.a. indépendante de Z prenant la valeur -1 ou $+1$ avec une probabilité $1/2$. Trouver la loi de SZ .
4. En déduire une méthode de simulation d'une loi centrée réduite.

Exercice 9 Soit un entier $n > 0$, μ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, Σ une matrice de covariance. La factorisation de Choleski permet de décomposer Σ sous la forme $\Sigma = AA^t$ avec A une matrice carrée.

Montrer que si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un n -uplet de v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors :

$$Y = AX + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma).$$

En déduire une méthode de simulation d'un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Exercice 10

Il est possible de simuler assez correctement la loi normale centrée réduite à l'aide de 12 variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$. Déterminer et justifier cette méthode.

Exercice 11

Soit X une v.a. dont la densité f est continue et à support compact inclus dans l'intervalle $[a, b]$. Soit k un réel tel que $k \in \sup_x f(x)$. On considère une v.a. $P = (U, V)$ uniformément distribuée dans le rectangle $[a, b] \times [0, k]$. On désigne par A la partie du plan située entre l'axe des abscisses et le graphe de f .

On cherche à simuler la loi de X . Pour ceci, on effectue des tirages successifs $P_1 = (U_1, V_1), \dots, P_n = (U_n, V_n), \dots$ selon la loi de P et l'on définit la v.a. X de la manière suivante : si le point $P_i = (U_i, V_i)$ se trouve dans A , alors on pose $Y = U_i$, sinon on tire à nouveau selon la loi de P et indépendamment des tirages précédents.

1. Soit N le nombre de tirages nécessaires pour atteindre A . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N = n) = \frac{\text{aire}(A)}{k(b-a)} \left(\frac{k(b-a) - \text{aire}(A)}{k(b-a)} \right)^{n-1}.$$

En déduire que par ce procédé, on atteint l'ensemble A au bout un nombre de tirages presque sûrement fini.

2. Montrer que Y peut se définir ainsi :

$$\begin{aligned} Y &= U_1 \quad \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \in A\} \\ Y &= U_2 \quad \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A, P_2 \in A\} \\ &\dots \\ Y &= U_n \quad \text{sur l'événement} \quad \{P_1 \notin A, \dots, P_{n-1} \notin A, P_n \in A\} \\ &\dots \end{aligned}$$

(En particulier, vérifier que ceci définit bien une v.a.)

3. Montrer que Y a même loi que X .

Exercice 12

Soit Z une v.a. r. de densité g et le vecteur $(Z, cg(Z)U)$ avec U suivant

une loi uniforme sur $[0, 1]$ et un réel $c > 0$ tel que pour tout réel x , $f(x) < cg(x)$. On note H l'hypographe de cg . On a G inclus dans H .

1. Démontrer que le vecteur $M(Z, cg(Z)U)$ suit la loi uniforme sur H .

On définit alors la suite $M_i(Z_i, cg(Z_i)U_i)$, avec (Z_i) et (U_i) une suite de v.a. i.i.d. de fonction de densité g et $\mathcal{U}$ respectivement. On définit $T(\omega) = \inf\{i \in \mathbb{N}^*, M_i(\omega) \in G\}$ et $M_T(\omega) = M_T(\omega)(\omega)$ si $T(\omega) < +\infty$, $M_T(\omega) = 0$ si $T(\omega) = +\infty$.

2. Rappeler la loi de T .
3. Démontrer que M_T suit la loi uniforme sur G .
4. Qu'en déduit-on pour Z_T .

Exercice 13 Soit la loi de probabilité sur $[-1, 1]$ définie par la fonction de densité f

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

Déterminer une méthode de simulation par rejet de f à partir de la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 14 Soit la loi de probabilité sur $[0, +\infty[$ définie par la fonction de densité f

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{(1 - \frac{e^{-x}}{2})} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}(x)$$

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 2e^{-x}$. En déduire une méthode de simulation par rejet de f à partir de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 15 Soit la loi de Weibull $W(a, b, c)$ définie par sa fonction de répartition F_W :

$$F_W(x) = \exp(-(\frac{x-b}{c})^a) \text{ pour } x \leq b$$

1. Soit Z une v.a. de loi $W(a, b, c)$. Montre que Z s'exprime en fonction de W de loi $W(a, 0, 1)$.
2. En déduire une méthode de simulation de X , puis Z .
3. Soit G une v.a.r. de loi gamma de paramètre $a > 0$ dont la fonction de densité est :

$$f_G(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(t)$$

Déterminer une méthode de simulation de G par rejet.

Exercice 16 Soit Z une v.a. discrète définie par $P(Z = k) = g(k)$ et le vecteur $(Z, cg(Z)U)$ avec U suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et un réel $c > 0$ tel que pour tout entier k , $f(k) < cg(k)$.

On définit alors la suite $M_i(Z_i, cg(Z_i)U_i)$, avec (Z_i) et (U_i) une suite de v.a. i.i.d. de même loi que Z et U respectivement. On définit $T(\omega) = \inf\{i \in \mathbb{N}^*, cg(Z_i) \leq f(Z_i)\}$ et $M_T(\omega) = M_T(\omega)(\omega)$ si $T(\omega) < +\infty$, $M_T(\omega) = 0$ si $T(\omega) = +\infty$.

1. Déterminer la loi de M .
2. Rappeler la loi de T .
3. Démontrer que Z_T suit la loi discrète définie par $P(Z_T = k) = f(k)$.

Exercice 17 Soit Z le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire sur $\{1, \dots, n\}$. choisi selon la loi uniforme sur l'ensemble des permutations. La loi de Z est donnée par :

$$P(Z = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

A l'aide de la loi de Poisson, déterminer une méthode de simulation de la loi de Z par rejet.